한국해안 · 해양공학회논문집
제 22 권 제 1 호, pp. 47~57, 2010년 2월

확장형 Boussinesq FEM model의 수치진동오차 개선
Wiggle-free Finite Element Model for extended Boussinesq equations

우승범* · 최영광** · Gonzalez-Ondina Jose M.***
Seung-Buhm Woo*, Youngkwang Choi** and Jose M. Gonzalez-Ondina***

요 지 : Woo and Liu (2004)의 확장형 Boussinesq FEM 수치모형에서 한계점으로 지적되었던 수치진동현상과 계산 효율성이 크게 개선되었다. 수치진동을 해결하기 위해 subgrid scale stabilization method를 사용하였고, 계산효율성을 높이기 위해서 Hessian 연산자를 도입하였으며, 유속벡터에 대한 행렬 구성을 하나의 행렬로 구성하였다. 또한 추가변수에 대한 행렬은 mass lumping technique을 사용하여 대각행렬로 구성하였다. Vincent and Briggs(1989)의 파랑 굴절 및 회절에 대한 수치실험 결과 수치진동현상이 확연히 줄어 들은 것을 관찰할 수 있었으며, 수리실험 결과와도 상당히 일치하는 결과를 보였다. 이전 모형에 비해 약 10배의 계산소요시간이 줄어 향후 항만부진동이나 퇴적물 이동과 같은 현실적인 문제에 적용이 가능할 것으로 기대된다.

핵심용어 : 확장형 Boussinesq FEM 수치모형, subgrid scale stabilization method, Hessian 연산자, mass lumping technique, Vincent and Briggs(1989)의 파랑 굴절 및 회절

Abstract : Subgrid scale stabilization method is applied to Woo and Liu(2004)'s extended Boussinesq FEM numerical model to eliminate the 2dx wiggles. In order to optimize the computational efficiency, Hessian operator is introduced and the matrix of velocity vector is combined to one matrix for solving matrix equations. The mass lumping technique is also applied to the matrix equations of auxiliary variables. The newly developed code is applied to simulate Vincent and Briggs(1989)' wave transformation experiments and the results show that the numerical solution is almost wiggle-free and it matches very well with experimental data. Due to improvement of computational efficiency and wiggle reduction, it is plausible to apply this model to a realistic problem such as harbor oscillation problems.

Keywords : extended Boussinesq FEM numerical model, subgrid scale stabilization method, Hessian operator, mass lumping technique, Vincent and Briggs(1989) wave transformation

1. 서 론

확장형 Boussinesq형 방정식은 장파와 단파의 거동 및 파랑 상호간의 간섭으로 인한 비선형성을 고려해 줄 수 있는 장점이 있어 많은 연구가 진행 중에 있다. 특히, 확장형 Boussinesq형 방정식 모형은 현재 널리 사용되는 선형이론에 근거한 파랑모형이나, Frequency domain 모델에서 해결하지 못하는 연안류, 쇄파류, 표사이동 및 비선형 항만부진동 등의 현상을 보다 정확히 재현할 수 있는 이론적 근거를 지니고 있다.

그러나 아직까지 확장형 Boussinesq형 방정식에 근거한 수치모형이 현실적으로 널리 사용되지 못한 가장 큰 이유는 수치 계산양이 막대하여 비경제적이기 때문이다. 수치 계산양이 많은 큰 이유 중 하나는 전체 계산 영역을 일정격자로 구성하는 유한차분형태의 수치기법을 사용(Nwogu, 1993; Wei et al., 1995; Chen et al., 2000)하였기 때문이며 이러한 어려움을 극복하고자 몇몇의 연구자에 의해 유한요소모형(Walkley and Berzins, 2002; Woo and Liu, 2004)이 개발되었다.

Woo and Liu(2004)는 Galerkin 유한요소법을 이용하여 Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식에 대한 2차원 모델을 구성한 바 있다. 선형의 유한요소를 사용하기 때문에 질량보존방정식에 존재하는 3차의 공간미분항을 해결하기 위해 추가변수를 도입하였으며, 시간적분방법으로는 Adams-Bashforth-Moulton Predictor Corrector 방법을 사용하였다. 이 유한요소모형(FEM)은 격자 크기를 조절함으로써 계산양을 효과적으로 줄일 수 있고 복잡한 항만이나 해안의 경계를 정확히 재현할 수 있으며, 특히 다른 Boussinesq형 방정식의 모형과는 달리 질량 보존을 만족시키는 no-flux 경계조건을 이용할 수 있는 장점이 있다.

그러나 대부분의 Boussinesq형 방정식 모형이 심한 수치진

*인하대학교 자연과학계열 해양과학과(Corresponding author, Department of Ocean Science, Inha University, 253, Yonghyun-dong, Nam-gu, Incheon, Korea, sbwoo@inha.ac.kr)
**(주)지오시스템리서치 연안해양·공학부(Department of Coastal Oceanography and Engineering, GeoSystem Research Corporation)
***코넬대학교 토목환경공학과(School of Civil & Environmental Engineering, Cornell University)

동이 발생하여 계산 결과가 부정확해 지는 것이 큰 단점으로 지적되어 왔듯이 Woo and Liu(2004)의 FEM 모형 역시 수치진동 현상을 줄이기 위해서는 인위적인 수치 filter를 이용해야만 하였다. 이러한 수치 filter를 사용할 경우 추가적으로 확산항을 더하는 경우가 되기 때문에 수치모델 결과 수치감쇄현상(Numerical dissipation)으로 인해 파랑의 진폭이 감소되는 결과를 보이며, 수치진동 현상 역시 완벽하게 제거되진 않는다.

본 연구에서는 Woo and Liu(2004)의 확장형 Boussinesq FEM 모형을 기반으로 수치진동을 획기적으로 줄일 수 있는 모형을 개발하였다. 본 모형과 기존의 모형을 비교함으로써 새 모형의 장단점을 분석하였고, 비교방법으로 다양한 경우의 수치모형 실험을 실시하였다. 특히, Vincent and Briggs (1989)의 수리모형 실험에 중점을 두어 비교 검증하였으며, 검증결과 본 모형에서 수치진동은 거의 발생하지 않았다.

본 논문의 2장에서는 지배방정식의 소개 및 Hessian 연산자를 도입하여 지배방정식을 재구성한 과정과 안정화 항의 추가 및 경계조건에 대하여 설명하고, 3장에서는 Vincent and Briggs(1989)의 수중 천퇴에 의한 파랑 변형 실험자료와 비교하여 개선된 수치모형의 검증 및 기존 모델과의 비교를 기술한다. 마지막으로 4장에서는 결론과 향후 연구방향에 대해 기술한다.

2. 개선된 유한요소모형

2.1 지배방정식

Woo and Liu(2004)의 확장형 Boussinesq FEM 모형은 Nwogu (1993)가 유도한 약비선형, 약분산형의 수정된 Boussinesq 방정식에 기초하고 있으며, 이것은 다음과 같이 제시된다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\nabla\cdot[(h+\varepsilon\eta)\mathbf{u}_\alpha]+\mu^2\nabla\cdot\{C_1h^3\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha) + C_3h^2\nabla[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\alpha)]\}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t}+\nabla\eta+\frac{\varepsilon}{2}\nabla(\mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha)+\mu^2\{C_2h^2\nabla(\nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t}) + \beta h\nabla[\nabla\cdot(h\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t})]\}=0 \tag{2}$$

여기서,

$$C_1=\frac{1}{2}\left(\beta^2-\frac{1}{3}\right), C_2=\frac{\beta}{2}, C_3=\beta+\frac{1}{2}, \beta=\frac{z_\alpha}{h} \tag{3}$$

이며, η는 자유수면변위, ∇는 $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\mathbf{u}_\alpha$는 $z=z_\alpha$에서의 수평방향 유속벡터로서 $\mathbf{u}_\alpha=(u_\alpha, v_\alpha)$로 정의되고, z_α는 임의의 수심을 나타내는 변수로서 z_α=-0.53 h에 해당한다. 식 (1), (2)는 질량보존방정식에 3차의 공간미분항이 존재하는 점과 운동량보존방정식에 2차의 공간미분항이 존재하는 점을 특징으로 제시할 수 있다.

Woo and Liu(2004)는 공간에 대한 변수를 근사화시키기 위해서 선형의 삼각형 요소를 사용하였으나 이를 위해서는 질량보존방정식에 존재하는 3차의 공간미분항을 해결해야만 하였다. 따라서 식 (4), (5)와 같은 추가변수를 도입하였다.

$$\mathbf{E}=(E_1,E_2):=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha) \tag{4}$$

$$R_1=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2},\quad R_2=\frac{\partial^2 h}{\partial y^2},\quad R_3=\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} \tag{5}$$

이러한 추가변수를 이용하여 지배방정식을 다시 기술하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\dot\eta+\frac{\partial}{\partial x}[(h+\varepsilon\eta)u_\alpha]+\frac{\partial}{\partial y}[(h+\varepsilon\eta)v_\alpha]\\&+\mu^2\frac{\partial}{\partial x}\left[C_1h^3E_1+C_3h^2\left(2\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+u_\alpha R_1+\frac{\partial v_\alpha}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}+v_\alpha R_3+\frac{\partial v_\alpha}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}+hE_1\right)\right]\\&+\mu^2\frac{\partial}{\partial y}\left[C_1h^3E_2+C_3h^2\left(2\frac{\partial v_\alpha}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}+u_\alpha R_3+\frac{\partial u_\alpha}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}+v_\alpha R_2+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}+hE_2\right)\right]=0\end{aligned} \tag{6}$$

$$\dot u_\alpha+\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta+\varepsilon\frac{1}{2}(u_\alpha^2+v_\alpha^2)\right]+\mu^2\left[C_2h^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \dot u_\alpha}{\partial x}+\frac{\partial \dot v_\alpha}{\partial y}\right)+\beta h\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(h\dot u_\alpha)}{\partial x}+\frac{\partial(h\dot v_\alpha)}{\partial y}\right)\right]=0 \tag{7}$$

$$\dot v_\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\left[\eta+\varepsilon\frac{1}{2}(u_\alpha^2+v_\alpha^2)\right]+\mu^2\left[C_2h^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \dot u_\alpha}{\partial x}+\frac{\partial \dot v_\alpha}{\partial y}\right)+\beta h\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(h\dot u_\alpha)}{\partial x}+\frac{\partial(h\dot v_\alpha)}{\partial y}\right)\right]=0 \tag{8}$$

$$E_1-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial y}\right]=0 \tag{9}$$

$$E_2-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}+\frac{\partial v_\alpha}{\partial y}\right]=0 \tag{10}$$

식 (6), (7), (8)에서 상첨자 ·는 시간에 대한 미분을 나타낸다. 추가변수의 도입으로 인해서 식 (1), (2)의 지배방정식은 공간에 대한 최고차 미분항이 2차가 됨을 알 수 있고, 선형의 Galerkin 유한요소방법을 적용할 수 있게 된다.

Galerkin 유한요소법은 가중잔차 성분이 0이 된다는 이론으로 수학적으로 정확성은 있으나 매 시간단계마다 행렬계산을 해야하기 때문에 유한차분법보다 계산소요시간이 많이 소요되는 점이 단점으로 지적되어 왔다. 본 연구에서는 이러한 단점을 최소화하기 위해 방정식 자체의 연산과정을 줄이는 방법과 추가변수에 대해서는 mass lumping technique을 취하는 방법을 수행하였다.

방정식 자체의 연산과정을 줄이기 위해 Hessian 연산자를 도입하여 지배방정식을 재구성하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\nabla\cdot[(h+\varepsilon\eta)\mathbf{u}_\alpha]+\mu^2\nabla\cdot\{(C_1+C_3)h^3\mathbf{E}+C_3h^2 [\mathbf{R}\mathbf{u}_\alpha+(\nabla\mathbf{u}_\alpha)\nabla h+\nabla h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha)]\}=F_\eta \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t}+\nabla\eta+\frac{3}{2}\nabla(\mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha) +\mu^2\left\{C_2h^2\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{u}_\alpha}{\partial t}\right)+\beta h\nabla\left[\nabla\cdot\left(h\frac{\partial\mathbf{u}_\alpha}{\partial t}\right)\right]\right\}=F_{\mathbf{u}_\alpha} \tag{12}$$

$$\mathbf{E}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha) \tag{13}$$

여기서

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}R_1 & R_3\\ R_3 & R_2\end{bmatrix}=Hh=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\nabla\mathbf{u}_\alpha=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} & \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}\\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} & \frac{\partial v_\alpha}{\partial y}\end{bmatrix} \tag{15}$$

이며, H는 Hessian 연산자를 의미한다. $\nabla\mathbf{u}_\alpha$는 $\mathbf{u}_\alpha$의 gradient로 Tensor field에 속하며, 식 (15)와 같이 행렬 형태로 쓰여진다(Goodbody, 1982). 식 (11)의 우변에 나타난 F_η항은 내부 조파에 관련된 항으로 파가 조파되는 지역 외의 다른 영역에서는 0이 된다. 식 (12)의 우변에 존재하는 $F_{\mathbf{u}_\alpha}$ 항은 에너지 분산에 관련된 항으로 스폰지층에 관련된 계산이나 바닥마찰 항, 쇄파 관련 계산에 필요한 항들을 의미한다(Kennedy et al., 2000; Woo and Liu, 2004).

추가변수에 대한 행렬계산은 삼각형 격자를 사용하게 됨에 따라 각 격자마다 3×3행렬을 구성하게 된다. 본 연구에서는 추가변수의 행렬계산에 대한 계산소요시간을 줄이기 위해 각 행의 대각 성분이 아닌 인자들을 각 행렬의 주 대각 성분으로 더해주는 mass lumping technique를 취하여 대각행렬에 대한 행렬계산을 수행하도록 구성하였다.

Mass lumping technique 과정을 도시하면 다음과 같다. 식 (16)은 mass lumping technique를 취하기 전의 추가변수에 대한 행렬 구성 형태를 나타내며, 여기에 mass lumping technique을 취한다는 것은 식 (17)과 같이 주 대각 성분으로 각 행의 성분들을 더해주는 것을 의미한다. 이런 연산과정 결과 식 (18)과 같은 행렬 구성이 이루어진다.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f}\\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\\ \mathbf{E}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{FE}_1\\ \mathbf{FE}_2\\ \mathbf{FE}_3\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f}\\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\\ \mathbf{E}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{FE}_1\\ \mathbf{FE}_2\\ \mathbf{FE}_3\end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{f} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{g}+\mathbf{h}+\mathbf{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\\ \mathbf{E}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{FE}_1\\ \mathbf{FE}_2\\ \mathbf{FE}_3\end{bmatrix} \tag{18}$$

식 (18)과 같이 mass lumping technique을 취한 후의 정확도 분석을 해보기 위해 truncation error 분석을 수행하였다. 분석을 수월히 하기 위해 식 (11)과 식 (12), (13)의 1차원 형태만 고려하였으며, 일정한 수심이라는 가정을 하였고, 식을 선형화하였다.

먼저 질량보존방정식인 식 (11)과 (13)을 정리하면 식 (19), (20)과 같다.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+h\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}+\mu^2K_1\frac{\partial E}{\partial x}=0,\quad K_1=(C_1+C_3)h^3 \tag{19}$$

$$E=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{20}$$

식 (19)와 (20)에 선형의 Galerkin 유한요소방법을 적용하면, 고정격자 상에서는 각각 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\Delta x}{6}(\dot\eta_{i+1}+4\dot\eta_i+\dot\eta_{i-1})+\frac{h}{2}(u_{i+1}-u_{i-1})+\mu^2K_1\frac{1}{2}(E_{i+1}-E_{i-1})=0 \tag{21}$$

$$\frac{\Delta x}{6}(E_{i+1}+4E_i+E_{i-1})=\frac{1}{\Delta x}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}) \tag{22}$$

식 (22)에 대해서 식 (18)과 같은 mass lumping technique을 취하면 식 (23)과 같이 나타내 줄 수 있다.

$$\Delta xE_i=\frac{1}{\Delta x}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}) \tag{23}$$

식 (23)을 식 (21)에 대입하여 정리하면 최종적인 수치이산화 식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{6}(\dot\eta_{i+1}+4\dot\eta_i+\dot\eta_{i-1})+\frac{h}{2\Delta x}(u_{i+1}-u_{i-1}) +\mu^2K_1\frac{1}{2\Delta x^3}(u_{i+2}-2u_{i+1}+2u_{i-1}-u_{i-2})=0 \tag{24}$$

식 (24)에 공간에 대한 Taylor series 전개를 이용하여 truncation error 분석을 해보면 다음과 같은 수치오차항들이 나타난다.

$$\mu^2K_1\frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^5u_\alpha}{\partial x^5}+\Delta x^4\left(\frac{1}{72}\frac{\partial^4\dot\eta}{\partial x^4}+\frac{h}{120}\frac{\partial^5u_\alpha}{\partial x^5}+\frac{\mu^2K_1}{40}\frac{\partial^7u_\alpha}{\partial x^7}\right)+O(\Delta x^6) \tag{25}$$

식 (25)는 식 (19)와 (20)에 대해 고정격자상에서 선형의 Galerkin 유한요소방법을 적용하였을 때 나타나는 수치오차항들을 의미한다. 수치오차항들 중에는 수치분산오차항이나 수치확산오차항이 존재하지 않아 수치이산화 과정으로 인해 생긴 수치오차항들이 지배방정식의 물리적인 의미에는 영향을 주지 않을 것이라 판단할 수 있다. 또한 공간에 대해서는 2차 정확도를 가짐을 알 수 있다.

참고로 식 (12)에 대해서도 1차원 형태만 고려하여 선형화

와 일정한 수심이라는 가정을 하면 식 (26)과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial \eta}{\partial x}+\mu^2 K_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}\right)=0,\ \ K_2=C_2h^2+\beta h^2 \tag{26}$$

식 (26)에 선형의 Galerkin 유한요소방법을 적용하면, 고정격자 상에서는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta x}{6}(\dot{u}_{i+1}+4\dot{u}_i+\dot{u}_{i-1})+\frac{h}{2}(\eta_{i+1}-\eta_{i-1})\\&+\frac{\mu^2K_2}{\Delta x}(\dot{u}_{i+1}-2\dot{u}_i+\dot{u}_{i-1})=0\end{aligned} \tag{27}$$

식 (27)에 공간에 대한 Taylor series 전개를 이용하여 truncation error 분석을 해보면 다음과 같은 수치오차항들이 나타난다.

$$\begin{aligned}&-\mu^2K_2\frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4\dot{u}_\alpha}{\partial x^4}\\&+\Delta x^4\left(\frac{1}{72}\frac{\partial^4\dot{u}_\alpha}{\partial x^4}+\frac{1}{120}\frac{\partial^5\eta}{\partial x^5}+\frac{\mu^2K_2}{360}\frac{\partial^6\dot{u}_\alpha}{\partial x^6}\right)+O(\Delta x^6)\end{aligned} \tag{28}$$

Truncation error 분석 결과 공간에 대해 2차 정확도를 가지며, 수치오차항 중에 수치확산오차항이나 수치분산오차항이 존재하지 않기 때문에 구조격자 상에서는 선형의 Galerkin 유한요소방법을 사용하더라도 지배방정식의 물리적인 의미에 영향을 주지 않음을 알 수 있다.

2.2 안정화 항 추가

이류현상이 지배적인 문제를 모델링 할 경우 수치진동현상이 나타날 수 있다는 많은 연구결과가 제기되어 왔다(Johnson, 1987; Zhong and Wang, 2007). 이러한 고주파성분의 진동현상은 부정확한 수치해를 나타내어 물리적인 현상을 파악하는데 어려움을 주며, 수치진동현상이 심해질 경우 모델의 해는 발산되어 더 이상 모의가 불가능해진다.

대부분의 천수방정식 모델이나 Boussineq형 방정식 모델은 이러한 수치진동현상을 줄이기 위해 수치 filter를 사용하고 있으나 이 방법은 정해진 시간 간격마다 인위적인 확산항을 가하는 것이기 때문에 수학적 또는 물리적으로 수치진동현상을 제거하는 방법이 아니며, 고주파 성분의 진동 현상을 완벽히 제거할 수도 없다.

본 연구에서는 이러한 수치진동 현상을 제어하여 수렴된 해를 구하기 위해 sub-grid scale stabilization method를 사용하였다. 이 방법은 변수를 두개의 성분으로 나누는데 한가지는 형상함수로 표현할 수 있는 것과 sub-grid scale로 정의되는 나머지 성분으로 나눠 sub-grid scale을 모델링하는 과정으로 이루어진다. 이 안정화 항에 관한 설명은 Codina(2001)와 Losada (2008)에 자세히 기술되어 있으므로 본 절에서는 간략히 기술한다.

본 절에서는 안정화항에 대한 유도과정을 보이기 위해 비분산성 방정식을 예로 설명한다. 본 연구의 지배방정식에서 μ^2=0을 취하면 비분산성, 약비선형 방정식이 되는데 이를 차원화시킨 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\nabla\cdot(\varphi\mathbf{u}_\alpha)=F_\eta \tag{29}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t}+g\nabla\varphi+\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{u}_\alpha)=F_{\mathbf{u}_\alpha}+g\nabla h \tag{30}$$

여기서, $\varphi=(h+\eta)$를 의미한다.

안정화 항을 찾기 위해서 시간 미분 관련 항을 시간에 대한 차분형태로 만들고 상기의 식을 선형화시킨다.

$$\delta_t\varphi+f\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha+\mathbf{a}\cdot\nabla\varphi=F_\eta \tag{31}$$

$$\delta_t\mathbf{u}_\alpha+g\nabla\varphi=F_{\mathbf{u}_\alpha}+g\nabla h-\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) \tag{32}$$

여기서,

$$\delta_t\varphi=\frac{\varphi^{n+1,i}-\varphi^n}{\delta_t^n},\ \delta_t\mathbf{u}_\alpha=\frac{\mathbf{u}_\alpha^{n+1,i}-\mathbf{u}_\alpha^n}{\delta_t^n} \tag{33}$$

$$\varphi^n=\varphi^{n+1,i},f=\varphi^{n+1,i-1},\mathbf{u}_\alpha=\mathbf{u}_\alpha^{n+1,i},\mathbf{a}=\mathbf{u}_\alpha^{n+1,i-1} \tag{34}$$

이며, n은 시간 단계 횟수를 의미하고 i는 시간적분에 필요한 반복 횟수를 의미한다.

Sub-grid scale stabilization method를 수행하기 위해 형상함수로 표현할 수 있는 성분(s)과 그 나머지 성분(r)으로 나눠보면 식 (35)와 같다.

$$\varphi=\varphi_s+\varphi_r,\ \mathbf{u}_\alpha=\mathbf{u}_s+\mathbf{u}_r \tag{35}$$

나머지 성분인 φ_r, $\mathbf{u}_r$성분이 없어야만 수치진동현상이 없는 수치해를 구할 수 있는데, φ_r, $\mathbf{u}_r$성분을 정확하게 계산할 수 있는 방법은 없다. 따라서 다음과 같은 가정을(Losada, 2008) 이용하여 요소 별로 φ_r, $\mathbf{u}_r$를 구하기 위한 Fourier 분석을 수행한다.

- 각 요소의 경계에서 sub-grid scale 성분들은 존재하지 않는다.
- $\delta_t\varphi_r$=0, $\delta_t\mathbf{u}_r$=0 즉, sub-grid scale 성분들의 시간변화율은 무시할 수 있다.

각 요소에서 sub-grid scale 성분들을 Fourier 변환시키면 고주파 성분들만 존재하여 sub-grid scale 성분에 대한 공간미분항은 다음과 같이 근사화 시킬 수 있다.

$$\partial_j\hat{\varphi}_r(\mathbf{k})\approx i\frac{k_j}{s^e}\hat{\varphi}_r(\mathbf{k}) \tag{36}$$

여기서, j는 x 또는 y를 의미하며, s^e는 요소의 크기, i=$\sqrt{-1}$, k는 무차원 wave number, ^는 Fourier 변환을 의미한다.

본 연구에서는 수학적인 연산과정을 통하여 sub-grid scale에 대한 모델링을 다음과 같이 근사화 하였다.

$$\mathbf{u}_r=\tau r_{\mathbf{u}} \tag{37}$$

여기서 $r_{\mathbf{u}}$는 유한요소 근사화에 따른 잔차성분을 의미하며, τ는 매 시간간격마다 모든 요소에서 계산 되어지는 scalar 값으로 식 (38)과 같이 구해질 수 있다.

$$\tau = C\left|\frac{s^e}{fg}\right|\|\mathbf{a}\| \tag{38}$$

이와 같은 연산과정을 거쳐서 최종적으로 구해지는 안정화 항은 식 (39)와 같다.

$$-\sum_{e=1}^{n_{el}}\left(C\left|\frac{s^e}{fg}\right|\|\mathbf{a}\|\right)\int_{\Omega^e}\nabla(\Psi_s f)\cdot\mathbf{r}_u d\Omega^e \tag{39}$$

여기서 n_{el}은 요소의 전체 수를 의미한다. 본 연구에서 안정화 항은 연속방정식에만 적용하여도 수치진동현상이 없는 수렴되는 해를 구할 수 있었기 때문에 연속방정식에만 적용하였으며, 식 (38)과 (39)에 존재하는 C는 경험적으로 결정되는 상수 값을 의미하고, 0.1~1 사이의 값들을 사용한다.

2.3 경계조건

Woo and Liu(2004)의 모델에서는 유속 성분인 u(식 (7))와 v(식 (8))에 대해 독립적으로 계산하고 이를 반복적으로 되풀이 하여 해가 수렴할 때까지 반복하는 방법을 취했다. 특히 경계에서는 각 조건에 따라 하나의 유속 성분(u 또는 v)을 계산한 뒤 그 값을 이용하여 다른 유속 성분을 계산하는 과정을 수행하였다. 이러한 과정은 경계에서 수렴되는 해를 구하기 위한 반복 횟수를 많이 필요로 하기 때문에 계산의 효율성을 저하시킨다.

본 연구에서는 계산의 효율성과 수렴도 높은 해를 구하기 위해 운동량 보존 방정식에 해당하는 행렬을 하나의 행렬로 구성하였다.

$$\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathbf{M}^{\mathbf{u_i v_i}} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{V}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{U}_i \\ \mathbf{V}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{FU}_1 \\ \mathbf{FV}_1 \\ \mathbf{FU}_2 \\ \mathbf{FV}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{FU}_i \\ \mathbf{FV}_i \end{bmatrix} \tag{40}$$

식 (40)에서 FU_n, FV_n는 유속성분의 시간 미분항에 의존하지 않는 모든 항을 뜻하며, M^{UiVi}는 Galerkin 방법을 적용함으로써 구성되는 질량행렬을 의미한다. n은 전체 노드 수를 의미한다.

식 (40)의 행렬 안에서 경계를 제외한 계산 영역 내부에서는 식 (41)과 같은 행렬로 구성하였다.

$$\begin{bmatrix} \cdots \\ \mathbf{M}^{\mathbf{u_i}} \ \ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \ \ \mathbf{M}^{\mathbf{v_i}} \\ \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots \\ \mathbf{U}_i \\ \mathbf{V}_i \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots \\ \mathbf{FU}_i \\ \mathbf{FV}_i \\ \cdots \end{bmatrix} \tag{41}$$

경계 노드 부분의 행렬구성은 식 (42)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \cdots \\ \mathbf{t_{ix}M^{u_i}} \quad \mathbf{t_{iy}M^{v_i}} \\ \mathbf{n_{ix}M^{u_i}} \quad \mathbf{n_{iy}M^{v_i}} \\ \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots \\ \mathbf{U}_i \\ \mathbf{V}_i \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots \\ \mathbf{t_{ix}FU}_i + \mathbf{t_{iy}FV}_i \\ \mathbf{0} \\ \cdots \end{bmatrix} \tag{42}$$

식 (42)에서 $t_{ix}M^{Ui}$는 경계노드에서 접선방향으로의 u성분에 대한 질량행렬을 의미하고 $t_{iy}M^{Vi}$는 경계노드에서 접선방향으로의 v성분에 대한 질량행렬을 의미한다. $N_{ix}M^{Ui}$와 $N_{iy}M^{Vi}$는 각각 경계노드에서 수직방향으로의 u성분과 v성분에 대한 질량행렬을 의미한다.

개선된 확장형 Boussinesq 유한요소모델에서는 위와 같이 U와 V에 대한 행렬을 하나의 행렬로 구성함으로써 경계에서 해를 구하는데 수렴도를 개선시켰으며, 기존에 제시된 모형에서 나타났던 7~8번의 반복횟수가 개선된 모형에서는 2번의 반복횟수만으로도 수렴되는 해를 구하여 계산 반복 횟수를 줄일 수 있었다. 또한 수렴도 개선에 따라 경계에서 나타나는 수치진동현상도 감소하였다.

3. 수치모형의 검증

본 연구를 통하여 개선된 확장형 Boussiesq 유한요소모형의 검증을 위해 수심이 변하지 않는 영역에서의 정현파 전파 실험, Vincent and Briggs(1989)의 파랑 전파 변형 실험, 수심이 급격히 변하는 지형에서의 고립파 전파 실험을 수행하였다. 본 실험 결과들은 Woo and Liu(2004)의 확장형 Boussinesq 수치 모형 및 수리모형 실험 또는 다른 수치 모형과 비교하여 제시하였다.

3.1 일정한 수심에서 단순 정현파의 전파 실험

대부분의 수치진동현상은 고차정확도의 기법을 이용하여 수심이 급변하는 문제 또는 급격하게 변하는 변수들을 계산할 때 생긴다(Toro, 1999). 이러한 수치진동현상에 대한 정확한 분석과 유한요소모형의 수치해 자체에는 수치진동현상이 없음을 보이기 위해 일정한 수심에서 단순 정현파의 전파 실험을 수행하였다.

Fig. 1은 일정 수심 3 m에서 27 m에 설치된 내부조파기를 이용하여 파를 조파한 결과를 나타낸다. 초기 진폭과 파장은 각각 0.1 m, 15 m이다. $\Delta x = \Delta y = 1$ m로 정삼각형 구조격자를 만들었으며, x방향으로는 202개의 요소, y방향으로

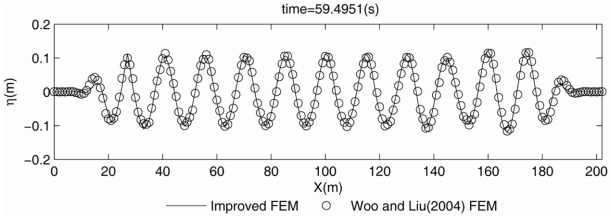


Fig. 1. Comparison of finite element numerical solutions between Woo and Liu(2004) FEM and Improved FEM at t=59.4951s.

Table 1. Input wave conditions for shoal test(Vincent and Briggs, 1989)

Case ID	Type	Peak Period (s)	Significant Wave Height(cm)	Condition
M2	Mono	1.30	2.54	Non-breaking

는 10개의 요소가 사용되었다. 도메인의 양 끝에는 약 25 m 간격으로 스폰지층이 설치되어 있다.

Fig. 1에 나와 있는 바와 같이 유한요소 수치해 자체에는 수치진동이 나타나있지 않으며, Woo and Liu(2004)의 확장형 Boussinesq 유한요소모형의 결과와 개선된 수치모형의 결과는 일치함을 알 수 있다.

3.2 Vincent and Briggs(1989)의 파랑 전파 변형 실험

Vincent and Briggs(1989)는 다방향조파기(directional spectral wave generator)를 사용하여 타원형 수중 천퇴상의 불규칙파 및 규칙파의 전파변형 실험을 수행하였다. 불규칙파 전파 실험은 입사파의 방향 분산성에 따라 일방향 불규칙파 입사파(U-series), 좁은 방향 분산성의 불규칙파 입사파(N-series), 넓은 방향 분산성의 불규칙파 입사파(B-series)의 3가지 경우에 대한 실험을 수행하였으며 각 경우마다 주기 분산성과 비선형성을 변화시켜 실험하였다. 그리고 각 경우를 기준이 되는 규칙파 입사파(M-series)와 비교하여 주기 분산성, 방향 분산성 및 비선형성이 수중천퇴를 통과하는 파랑의 변형에 미치는 영향을 분석하였다.

본 연구에서는 Vincent and Briggs(1989)의 실험 중 Table 1과 같은 규칙파 입사파의 비쇄파조건에 대한 수치모의를 수행하였다. Table 1에 제시된 M2 실험은 주기 1.3초, 진폭 1.27 m의 규칙파를 입사파 조건으로 수행한 실험이다. 이 실험에서는 수중 천퇴를 통과할 때 파속의 차이로 인한 파의 굴절 현상이 나타나며, 수중 천퇴 후면에서 파의 회절 현상이 발생한다. 본 실험을 통하여 수리모형실험 결과를 이용한 개선된 수치모형의 정확성을 검증하였으며, Woo and Liu(2004)

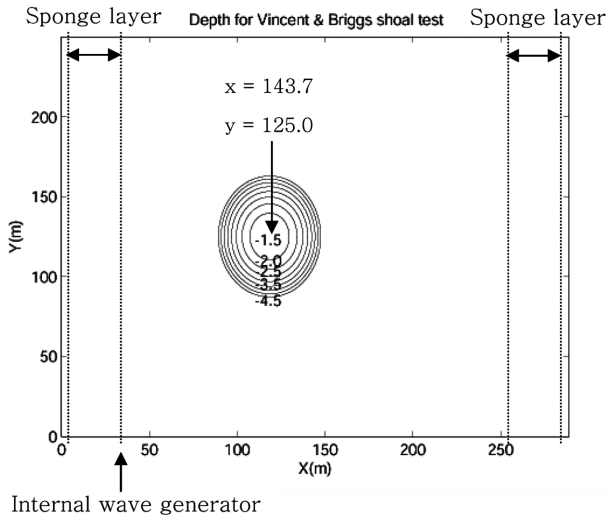


Fig. 2. Schematic domain for Vincent and Briggs(1989)' shoal test.

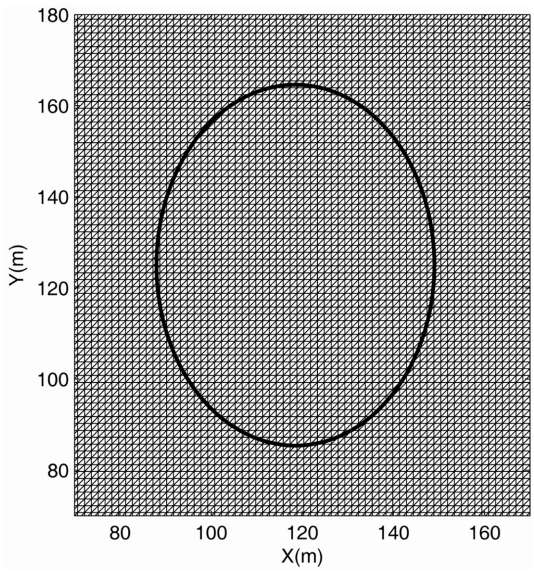


Fig. 3. Finite element mesh around shoal.

의 수치모형과 비교하여 수치진동현상에 대한 개선사항을 검토하였다.

수치실험을 하기 위한 모의영역은 Fig. 2에 제시하였으며, round-off 오차를 방지하기 위해 Vincent and Briggs(1989)의 수리실험의 실험 영역이나 조건에 비해 10배를 취한 실험영역과 조건을 구성하였다.

Fig. 2에서 볼 수 있듯이 내부조파기를 이용하여 파를 조파시켰으며, Vincent and Briggs(1989)의 수리실험과 같이 타원형의 수중천퇴를 만들어 수심 조건을 구성하였다. 그리고 실험영역의 양 끝에는 반사파가 생성되는 것을 방지하기 위해 스폰지층을 만들어 양쪽 경계에서는 파가 소멸되게끔 구성하였다.

계산영역은 $\Delta x = \Delta y = 1.504$ m의 삼각형 요소로 구성하였으며, 한 파장당 15개의 요소가 포함된다. Fig. 3에 천퇴 주변의 격자 형상을 제시하였다.

사용된 전체 요소 수는 63744개이며 전체 노드 수는 32231개가 된다. 수치실험은 정상상태의 결과를 얻기 위해 0초부터 300초까지 수행되었으며, 정상상태는 약 80초에 도달하였다. 비쇄파현상에 대한 파랑의 전파 변형과정을 보면 Fig. 4와 같다.

Fig. 4(a)에서 내부조파기를 이용하여 전파되는 파랑의 모습을 볼 수 있으며, Fig. 4(b)에서는 지형변화를 느끼는 파랑이 파속에 의한 차이로 굴절 현상이 발생되는 것을 볼 수 있다. 또한 천퇴 후면에서는 회절 현상이 나타나는 것을 볼 수 있어 개선된 수치모형이 굴절 및 회절 현상을 잘 재현하고 있음을 알 수 있다. Fig. 4(c), (d)에서는 모의영역의 양 끝에서 스폰지층이 설정됨으로 인해 반사파에 대한 영향은 없는 것을 알 수 있다.

본 연구를 통해 개선된 수치모형과 Woo and Liu(2004)의 수치모형을 비교해보기 위해 Fig. 2에 제시된 모의 영역의

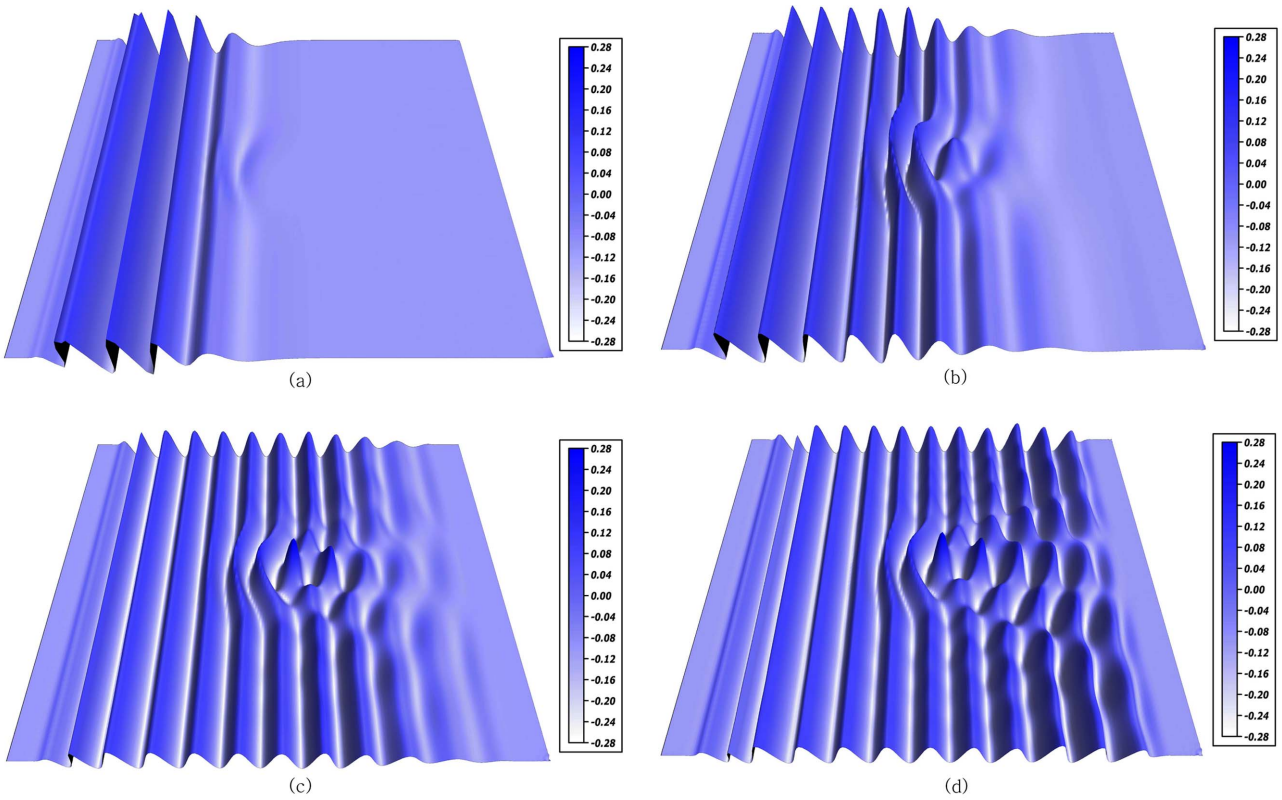


Fig. 4. The overview about wave refraction and diffraction for non-breaking: The snapshots of improved extended Boussinesq FEM model at (a) 15.8s, (b) 31.8s, (c) 47.8s, (d) 63.8s.

x축 178.9 m와 y축 124.8 m에서 파랑이 전파해 나가는 단면을 비교해보았다. 비교한 그림은 Fig. 5와 같다.

Fig. 5(a), (c)에 제시된 x축 178.9m에서 파랑이 전파하는 단면을 보면 Woo and Liu(2004)의 수치모형의 경우 수치진동 현상이 심한 것을 볼 수 있으나 현재 개선된 모형은 수치진동현상이 없으면서 진동하는 선의 중간부분을 따르는 파형이 나타나 있는 것을 알 수 있다. Fig. 5(b), (d)에 나타난 y축 124.8 m를 따라 파랑의 단면을 그린 결과 역시 비물리적인 진동 현상이 없이 전파하는 모습을 보여주고 있다.

비쇄파현상에 대한 Vincent and Briggs(1989)의 수리실험 결과와 Woo and Liu(2004)의 수치모형실험 결과, 개선된 확장형 Boussinesq FEM 모형의 결과를 Fig. 6에 제시하였다. 수치 모형에서의 결과는 x축 178.9m를 따른 결과를 Vincent and Briggs(1989)의 실험 결과와 비교하였다. Fig. 7에는 개선된 확장형 Boussinesq FEM 모형에 대한 전 영역의 normalized 파고 분포를 제시하였다.

Fig. 6의 Vincent and Briggs(1989)의 실험 결과와 수치모형 결과에는 수중천퇴 후면에서 굴절로 인한 에너지 집중현상과 회절로 인한 에너지 분산 효과가 포함된 파고분포가 나타나 있다. 본 연구를 통해 개선된 모델은 실험 결과와 매우 양호한 일치를 보이며, Woo and Liu(2004)의 수치모형보다 정확함을 입증할 수 있다. Fig. 7에는 개선된 수치모형의 전 영역에 대한 normalized 파고분포를 제시하였는데, 파랑의 굴절로 인하여 천퇴 후면의 중앙부분에서 에너지가 가장 집중되어 있음을 알 수 있다.

다음으로 Vincent and Briggs(1989)의 실험 중 쇄파 현상에 대한 모의 결과를 제시한다. Vincent and Briggs는 Table 2의 조건을 이용하여 쇄파 현상에 대한 수리 실험을 수행하였다.

수치실험을 하기 위한 모의영역은 비쇄파 현상을 모의했던 영역과 같으며, 이 경우 역시 round-off 오차를 방지하기 위해 Vincent and Briggs(1989)의 수리실험의 조건에 비해 10배를 취한 조건을 이용하였다. 총 모의시간은 800초까지 모의하였으며, 각 100초마다 normalized 파고 값을 구하여 실험 값과 비교하였다. Vincent and Briggs(1989)의 실험 결과와 개선된 확장형 Boussinesq FEM 모형의 결과 중 700초에서 800초까지의 normalized 파고 값을 제시하면 Fig. 8과 같다.

Fig. 8의 결과를 보면 비쇄파 현상에 대한 결과와는 달리 천퇴 후면의 중앙 부분에서 normalized 파고 분포가 낮아진 형상을 볼 수 있다. 이것은 천퇴 정상부에서 쇄파가 발생되면 천퇴 후면에서 쇄파에 의한 파 진행방향으로의 쇄파유도류(breaking induced currents)가 발생하기 때문이며, Yoon et al.(2004)에 의해 역학 구조가 제시된 바 있다.

3.3 급변하는 지형에서 고립파의 전파

급격하게 변하는 지형에서 고립파의 반사 현상 및 분리 현상에 대한 수치실험을 통하여 개선된 모형의 정확도를 검토하였다. 수치실험 결과는 FUNWAVE(Wei and Kirby, 1995; Kirby et al., 1998; Kirby et al., 2003) 수치실험 결과 및 Woo

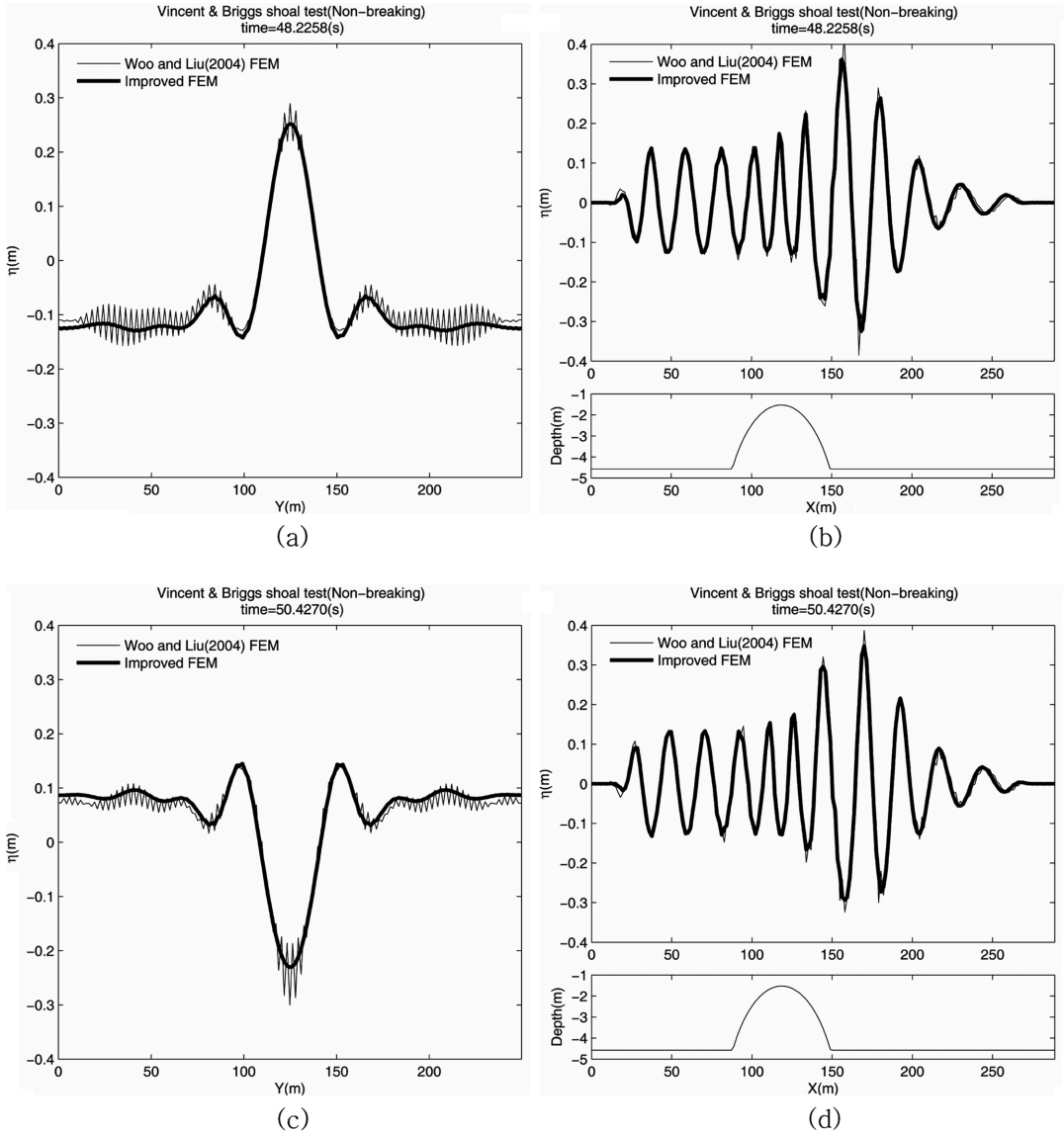


Fig. 5. Comparison of numerical solutions for Vincent and Briggs' shoal test : The free surface elevation along (a) x=178.9m at t=48.2258s, (b) y=124.8 m at t=48.2258s, (c) x=178.9 m at t=50.4270s, (d) y=124.8 m at t=50.4270s.

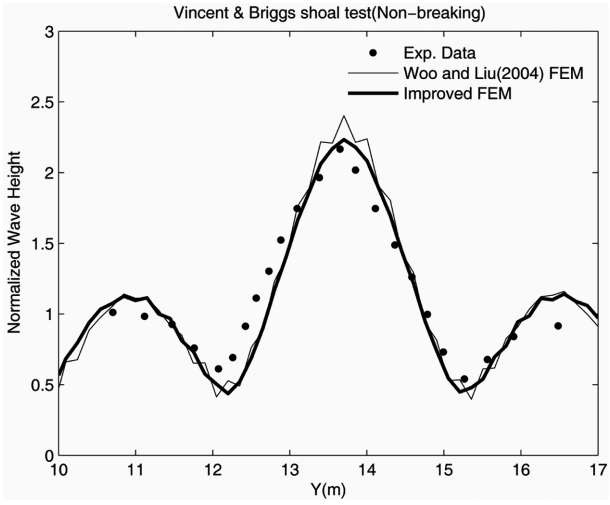


Fig. 6. Comparison of normalized wave height between experimental data and numerical results for M2 case.

Table 2. Input wave conditions for shoal test(Vincent and Briggs, 1989).

Case ID	Type	Peak Period (s)	Significant Wave Height(cm)	Condition
M3	Mono	1.30	13.50	Breaking

and Liu(2004)의 확장형 Boussinesq FEM 모형과 비교하였다.

FUNWAVE 수치모형은 현재 FUNWAVE 2.0까지 개발되었으며, 모의하고자 하는 현상에 따라 지배방정식을 선택할 할 수 있다. FUNWAVE 1.0은 사각형 형태의 격자만 생성이 가능한 반면, FUNWAVE 2.0의 경우 곡선 형태의 격자까지 생성이 가능하도록 개발되었다. 본 절에서 모의하고자 하는 현상의 계산영역은 곡선 형태의 격자까지 요구하진 않으므로 FUNWAVE 1.0을 이용하여 모의하였으며, 지배방정식은 Nwogu(1993)의 확장형 Boussinesq 방정식을 선택하였다.

계산영역은 $-4000 \le x \le 14000$ m, $0 \le y \le 60$ m이고, y축 방

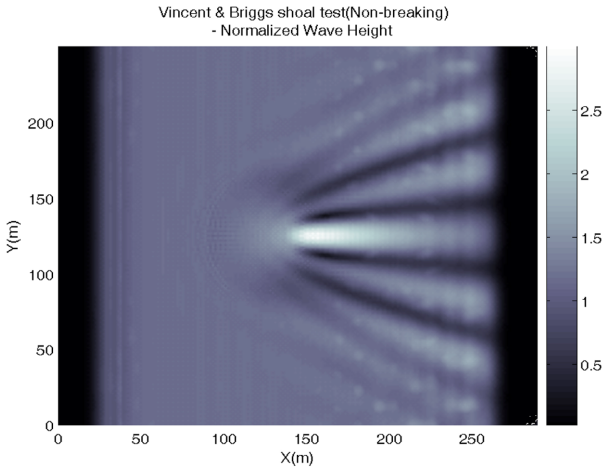


Fig. 7. Normalized wave height of improved extended Boussinesq FEM model for M2 case.

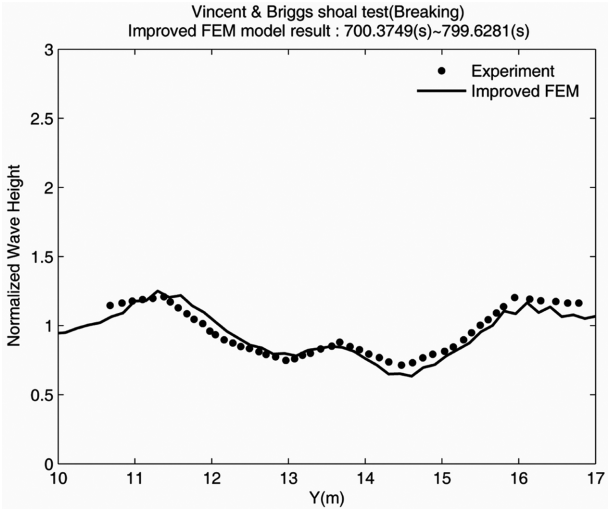


Fig. 8. Comparison of normalized wave height between experimental data and numerical results for M3 case.

향으로의 수심변화는 없다. x=4000 m를 기준으로 $x \le 4000$일 때는 일정수심 h=10 m이며, x>4000 m일 경우에는 h=5 m가 된다. 수치계산에 크기 $\Delta x=\Delta y$=5 m를 갖는 삼각형 요소를 사용하였고, 전체 노드 수는 46813개, 전체 요소 수는 86400개를 사용하였다. 고립파의 초기조건으로는 a/h=0.03으로 하였다.

먼저 Fig. 9에 개선된 확장형 Boussinesq FEM 모형의 결과를 제시하였다.

Fig. 9에 급변하는 수심에서의 고립파 전파에 대한 전체모습을 제시하였다. x=4000 m인 급변하는 수심에서 반사파가 생성되는 것을 알 수 있으며, 반사파가 생성된 후 초기의 비선형성과 분산성의 균형이 깨지면서 고립파의 분리되는 현상이 나타나고 있다. 또한 x=4000 m 지점에서 수치진동 현상이 나타나는 것을 확인할 수 있는데, 이것은 본래의 확장형 Boussinesq 방정식(Nwogu, 1993) 자체가 급변하는 수심을 고려할 수 있는 지배방정식이 아니기 때문에 x=4000 m 지점에서 수치진동 현상이 나타났으며, 이러한 수치진동현상까지 제거되기 위

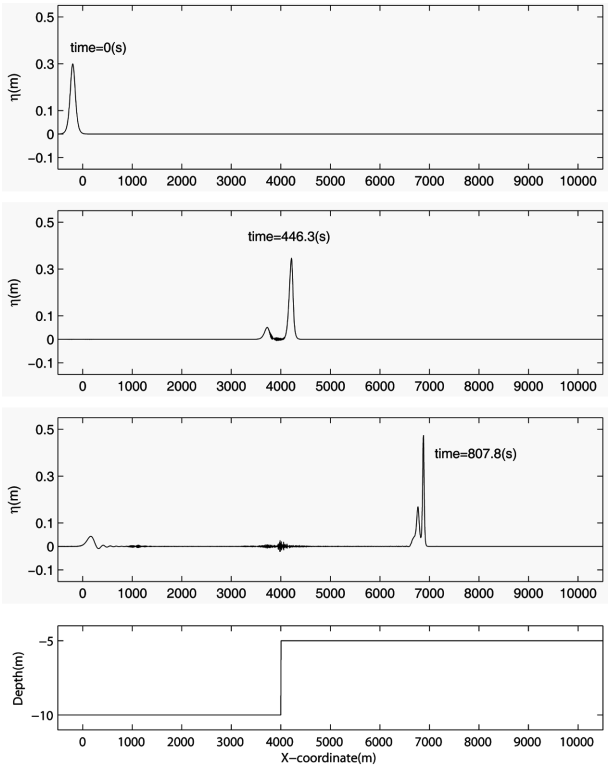


Fig. 9. Fission and reflection of a solitary wave propagating over discontinuous depth for improved Boussinesq FEM model.

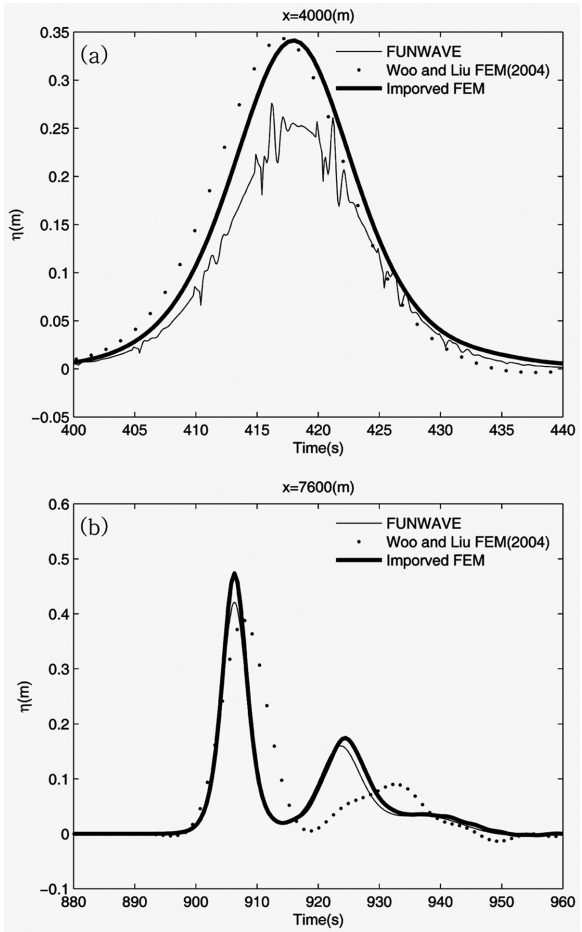


Fig. 10. Comparison of time history of numerical solutions at (a) x=4000 m, y=30 m, (b) x=7600 m, y=30 m.

해서는 방정식 자체 내에 급변하는 수심을 고려할 수 있는 항이 있어야 한다고 판단된다.

x=4000 m와 7600 m에서 유한차분모형인 FUNWAVE 및 Woo and Liu(2004)의 확장형 Boussinesq FEM 모형과 결과를 비교하였다.

Fig. 10의 수심이 급격하게 변하는 x=4000 m 지점의 결과를 보면 FUNWAVE는 수면변위 형태가 매우 불안정한 모습을 보이나 Woo and Liu(2004)의 모형과 개선된 확장형 Boussinesq FEM 모형은 수치적인 불안정성 없이 고립파의 전파 형태를 제대로 계산하였다. x=7600 m 지점의 수면변위를 보면 세 모형 다 고립파의 전파 형태는 나타났으나 Woo and Liu(2004)의 수치모형이 두 모형과 이동거리 차이를 나타내었다. 이것은 Woo and Liu(2004) 모형에서 선형의 삼각형 요소를 사용함에 따라 나타난 수치오차항과 급격한 수심을 지나면서 형성되는 반사파에 뒤따르는 수치진동현상에 의한 것으로 사료되며, FUNWAVE의 결과가 개선된 확장형 Boussinesq FEM 모형보다 진폭이 낮은 것은 수심이 급변하는 x=4000 m 지점에서 수치적인 불안정성이 야기된 결과로 판단된다. 반면 세 모형 중 개선된 확장형 Boussinesq FEM 모형의 수위가 가장 높은 점은 안정화 항이 존재하여 수치진동현상이 가장 작게 발생하였기 때문인 것으로 사료된다.

4. 결 론

Woo and Liu(2004)의 확장형 Boussinesq FEM 수치모형은 추가변수를 도입함에 따라 5개의 행렬식을 풀어야만 한다. 이것은 기존의 유한차분모형에 비해 상당한 양의 계산이 필요한 것으로 현실적인 문제의 적용에는 큰 제약이 된다. 또한 대부분의 Boussinesq 계열의 모형과 마찬가지로 수치적인 진동현상을 줄이기 위하여 filter를 사용하는데, filter를 사용한다 하더라도 수치적인 진동이 다 제거되는 것은 아니기 때문에 이것은 좋은 방법이라 할 수 없다.

본 연구에서는 상기의 문제점들을 해결하기 위해서 Woo and Liu(2004)의 확장형 Boussinesq FEM 수치모형을 개선하였다. 계산소요시간을 줄이기 위해 Hessian 연산자를 이용하여 지배방정식을 재구성하였으며, 유속 벡터에 대한 행렬은 하나의 행렬로 구성하였다. 추가변수에 대한 행렬은 mass lumping technique를 사용하여 대각행렬이 구성되도록 하였다. 그리고 수치적인 진동현상을 줄이기 위해서 subgrid scale stabilization method를 사용하여 연속방정식에 안정화 항을 추가하였다.

개선된 수치모형을 비쇄파현상에 대한 Vincent and Briggs (1989)의 실험자료와 비교 결과 상당히 일치하는 결과를 보였으며, Woo and Liu(2004)의 확장형 Boussinesq FEM 수치모형에서 나타났던 수치진동 현상 역시 확연히 줄어든 결과가 나타났다. 이 결과를 통해 개선된 확장형 Boussinesq FEM 모형은 오랜 시간을 모의해야 하는 문제라도 수치적인 불안정성 없이 모의가능하며, 이전 모형에 비해 상당히 안정적이고 정확하다고 할 수 있다.

Vincent and Briggs(1989)의 쇄파 현상은 기존의 spectral 모형이나 선형 파랑 모델 자체만으로는 실험값과 일치하는 결과를 보이기 어려워 대부분 천수방정식 계열의 모형과 접합시켜 역학구조를 설명했다. 본 연구에서는 기존의 연구와는 달리 Vincent and Briggs(1989)의 쇄파 현상 실험 결과와 상당히 일치하는 결과를 보여 쇄파에 따른 퇴적물 이동 문제에도 적용 가능할 것으로 판단된다.

수심이 급격하게 변하는 지형에서 고립파가 전파하는 실험을 수행한 결과, 유한차분모형인 FUNWAVE는 수심이 급격하게 변하는 지점에서 수치적인 불안정성을 나타내었으나, 현재 개선된 모형은 안정적인 수면변위를 나타내었다. 대부분의 천수방정식 계열의 모델이 수심이 급변하는 지형에서 발산하는 결과를 보이는데 반하여 본 연구를 통하여 개선된 수치모형은 약간의 수치진동현상은 나타났지만 고립파의 형태가 재현되었으며, 수렴되는 결과를 보였다.

현재 개선된 수치모델의 계산소요시간은 81009개의 노드와 160768개의 요소로 만들어진 모델의 모의영역을 2개의 AMD Opteron 244(1.79GHz) CPU가 장착된 컴퓨터에서 0.05초의 시간간격으로 모의할 때 이전 모델의 계산소요시간의 1/14배로 감소하였다. 따라서 모델 수행시 계산소요시간 측면은 현실적인 문제의 적용에도 어려움이 없을 것이라 판단된다. 하지만 아직까지 행렬을 계산해야만 해를 구할 수 있기 때문에 격자를 매우 세밀하게 구성할 경우 메모리 부족 문제 등이 나타나고 있다. 이를 해결하기 위하여 모델의 병렬화를 수행할 경우 항만부진동이나 퇴적물 이동과 같은 현실적인 문제에도 적용이 가능해지며, 현재 많이 쓰여지고 있는 선형 파랑 모델에 비해 좀 더 정확한 예측을 할 수 있을 것이라 사료된다.

감사의 글

본 연구는 기상청 기상지진기술개발사업(CATER 2009-2313)의 지원에 의해 수행되었습니다. 본 논문의 완성도를 높여주신 심사위원들께 진심으로 감사드립니다.

참고문헌

Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., Kennedy, A.B. and Chawla, A. (2000). Boussinesq modeling of wave transformation, breaking, and runup. II:2D. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 126(1), 48-56.

Codina, R. (2001). A stabilized finite element method for generalized stationary incompressible flows. Computer methods in applied mechanics and engineering, 190, 2681-2706.

Goodbody, A.M. (1982). Cartesian tensors : With applications to mechanics, fluid mechanics and elasticity. JOHN WILEY & SONS, New York, N.Y.

Johnson, C. (1987). Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Cambridge University Press.

Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (2000). Boussinesq modeling of wave transformation, breaking, and runup. I: 1D. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 126(1), 39-47.

Kirby, J.T., Wei, G., Chen, Q., Kennedy, A.B. and Dalrymple, R.A. (1998). Fully nonlinear Boussinesq wave model, Documentation and User's Manual. Technical Report CACR-98-06, University of Delaware.

Kirby, J.T., Long, W. and Shi, F. (2003). Fully nonlinear Boussinesq wave model on curvilinear coordinates, Documentation and User's Manual. Technical Report CACR-02-xx, University of Delaware.

Losada, I.J., Gonzalez-Ondina, J.M., Diaz, G. and Gonzalez, E.M. (2008). Numerical modeling of nonlinear resonance of semi-enclosed water bodies: Description and experimental validation. Coastal Engineering, 55, 21-34.

Nwogu, O. (1993). Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 119(6), 618-638.

Toro, E.F. (1999). Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics – A practical introduction. Springer, Berlin.

Vincent, C.L. and Briggs, M.J. (1989). Refraction-diffraction of irregular waves over a mound. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 115(2), 269-284.

Walkley, M. and Berzins, M. (2002). A finite element method for the two-dimensional extended Boussinesq equations. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 39, 865-885

Wei, G. and Kirby, J.T. (1995). Time dependent numerical code for extended Boussinesq equations. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 121(5), 251-261.

Woo, S.-B. and Liu, P.-H. (2004). Finite element model for modified Boussinesq equations. I: Model development. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 130(1), 1-16.

Yoon, S.B., Cho, Y.S. and Lee, C. (2004). Effects of breaking-induced currents on refraction-diffraction of irregular waves over submerged shoal. Ocean Engineering, 31, 633-652.

Zhong, Z and Wang, K.H. (2007). Time-accurate stabilized finite-element model for weakly nonlinear and weakly dispersive water waves. International Journal for Numerical methods in fluids, accepted.

원고접수일: 2008년 4월 22일
수정본채택: 2010년 1월 19일
게재확정일: 2010년 1월 25일